

ФГБОУ ВО «УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»  
СИБАЙСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) УУиТ  
ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол № 11 от «31» мая 2023 г.

И.о. зав.кафедрой  / Гумеров И.С.



Согласовано:

Председатель УМК естественно-математического факультета

 / Ильбулова Г.Р.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Дисциплина **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

(наименование дисциплины)

**Обязательная часть**

(обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений, факультатив)

**программа бакалавриата**

Направление подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

(указывается код и наименование направления подготовки)

Направленность (профиль) подготовки

**Прикладная математика и информационные технологии**

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

**бакалавр**

(указывается квалификация)

Разработчик (составитель)

доцент, к.ф.-м.н.,

(должность, ученая степень, ученое звание)

 / Беликова О.Н.

Для приема: 2023 г.

Сибай 2023 г.

Составитель: Беликова О.Н.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий, протокол № 11 от «31» мая 2023 г.

И.о. заведующего кафедрой

 / Гумеров И.С./

Дополнения и изменения, внесенную в рабочую программу дисциплины

---

---

утверждены на заседании кафедры

протокол №\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

Дополнения и изменения, внесенную в рабочую программу дисциплины

---

---

утверждены на заседании кафедры

протокол №\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

Дополнения и изменения, внесенную в рабочую программу дисциплины

---

---

утверждены на заседании кафедры

протокол №\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

## **Список документов и материалов**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
  - 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине
  - 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций
  - 4.3. Рейтинг-план дисциплины
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
  - 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
  - 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

| Категория (группа) компетенций                                    | Формируемая компетенция<br>(с указанием кода)                                                                              | Код и наименование индикатора достижения компетенции                                                                        | Результаты обучения по дисциплине                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Теоретические и практические основы профессиональной деятельности | ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности | ОПК-3.1<br>Обладает фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач.                       | <i>Знать</i> основные факты, концепции, принципы математического моделирования, используемого при решении прикладных задач. |
|                                                                   |                                                                                                                            | ОПК-3.2.<br>Умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.            | <i>Уметь</i> использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.                 |
|                                                                   |                                                                                                                            | ОПК-3.3.<br>Имеет навыки применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. | <i>Владеть</i> навыками применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.  |

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Методы оптимизации» относится к обязательной части дисциплин. Дисциплина изучается на 4 курсе в 7 семестре очной формы обучения и на 5 курсе в 9 семестре очно-заочной формы обучения.

Дисциплина «Методы оптимизации» знакомит обучающихся с широким кругом различных оптимизационных задач, используемых в проектировании технических устройств и технологических процессов, распределении ограниченных ресурсов и планировании работы предприятия, и решении проблем, возникающих в повседневной жизни человека.

Цель дисциплины: формирование у студентов знаний по основам теории оптимизации и знаний об основных подходах к практическому решению оптимизационных задач, что позволит применять методы анализа прикладной области на концептуальном, логическом, математическом и алгоритмическом уровнях, а также применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач.

Для усвоения дисциплины обучаемый должен владеть базовым математическим аппаратом. Обучаемый должен обладать навыками системного, функционального и статистического анализа.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий,

## учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

### 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

#### 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотношенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Код и формулировка компетенции:

**ОПК-3:** Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности

| Код и наименование индикатора достижения компетенции                                                                     | Результаты обучения по дисциплине                                                                               | Критерии оценивания результатов обучения                                                                               |                                                                                                                             |                                                                                                                            |                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                          |                                                                                                                 | 2 («Не удовлетворительно»)                                                                                             | 3 («Удовлетворительно»)                                                                                                     | 4 («Хорошо»)                                                                                                               | 5 («Отлично»)                                                                                                                      |
| ОПК-3.1. Обладает фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач.                      | Обладает фундаментальными знаниями, по математическим моделям для решения прикладных задач.                     | Не обладает фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач.                          | Обладает на удовлетворительном уровне фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач.     | Обладает на хорошем уровне фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач.               | Обладает на отличном уровне фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач.                      |
| ОПК-3.2. Умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.            | Умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.            | Не умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.                | Слабо умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.                  | Хорошо умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.                | Уверенно умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.                      |
| ОПК-3.3. Имеет навыки применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. | Имеет навыки применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. | Не владеет навыками применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. | Навыки применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности сформированы слабо | Хорошо владеет навыками применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. | Отлично владеет навыками выбора применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. |

#### 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотношенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

| Код и наименование индикатора достижения компетенции                                                                        | Результаты обучения по дисциплине                                                                                          | Оценочные средства                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-3.1.<br>Обладает фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач.                      | <i>Знать</i> фундаментальные основы, знаний по математическим моделям для решения прикладных задач.                        | Ответы на вопросы на практических занятиях, решение задач на практических занятиях, решение самостоятельных работ, экзамен |
| ОПК-3.2.<br>Умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.            | <i>Уметь</i> использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.                | Ответы на вопросы на практических занятиях, решение задач на практических занятиях, решение самостоятельных работ, экзамен |
| ОПК-3.3.<br>Имеет навыки применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. | <i>Владеть</i> навыками применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности. | Ответы на вопросы на практических занятиях, решение задач на практических занятиях, решение самостоятельных работ, экзамен |

Критериями оценивания при *модульно-рейтинговой системе* являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10)

Шкалы оценивания:

для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»; от 60 до 79 баллов – «хорошо»; от 80 баллов – «отлично».

### Рейтинг-план дисциплины

#### Методы оптимизации

Направление: Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки: Прикладная математика и информационные технологии

Курс 4, семестр 7

| Виды учебной деятельности студентов | Балл за конкретное задание | Число заданий за семестр | Баллы       |              |
|-------------------------------------|----------------------------|--------------------------|-------------|--------------|
|                                     |                            |                          | Минимальный | Максимальный |
| Модуль 1                            |                            |                          |             |              |
| Текущий контроль                    |                            |                          | 6           | 13           |
| 1. Аудиторная работа                | 1                          | 4                        | 1           | 4            |
| 2. Выполнение самостоятельных работ | 3                          | 3                        | 5           | 9            |
| Рубежный контроль                   |                            |                          |             |              |
| 1. Контрольная работа №1            |                            | 1                        | 5           | 10           |
| Модуль 2                            |                            |                          |             |              |
| Текущий контроль                    |                            |                          | 7           | 14           |
| 1. Аудиторная работа                | 2                          | 3                        | 3           | 6            |

|                                                                        |   |    |           |            |
|------------------------------------------------------------------------|---|----|-----------|------------|
| 2. Выполнение самостоятельных работ                                    | 4 | 2  | 4         | 8          |
| <b>Рубежный контроль</b>                                               |   |    |           |            |
| 1. Контрольная работа №2                                               |   | 1  | 5         | <b>10</b>  |
| <b>Модуль 3</b>                                                        |   |    |           |            |
| <b>Текущий контроль</b>                                                |   |    | 7         | <b>13</b>  |
| 1. Аудиторная работа                                                   | 1 | 5  | 3         | 5          |
| 2. Выполнение самостоятельных работ                                    | 4 | 2  | 4         | 8          |
| <b>Рубежный контроль</b>                                               |   |    |           |            |
| 1. Контрольная работа №3                                               |   | 1  | 5         | <b>10</b>  |
| <b>Поощрительные баллы</b>                                             |   |    |           |            |
| 1. Выполнение заданий повышенной трудности                             | 1 | 10 | 0         | 10         |
| <b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b> |   |    |           |            |
| 1. Посещение лекционных занятий                                        |   |    | 0         | <b>6</b>   |
| 2. Посещение практических занятий                                      |   |    | 0         | <b>10</b>  |
| <b>Итоговый контроль</b>                                               |   |    |           |            |
| 1. Экзамен                                                             |   |    | 0         | <b>30</b>  |
| <b>ИТОГО</b>                                                           |   |    | <b>35</b> | <b>110</b> |

### Планы лекционных и практических занятий

#### Модуль 1 Условия существования экстремума функций

Лк: 8 ч., пр.з: 8 ч. Темы лекций и практических занятий:

Общая постановка задачи оптимизации и основные положения.

Необходимые и достаточные условия существования безусловного экстремума.

Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума: постановка задачи и основные определения.

Условный экстремум при ограничениях типа равенств.

Условный экстремум при ограничениях типа неравенств.

Условный экстремум при смешанных ограничениях.

#### Модуль 2. Численные методы поиска безусловного экстремума

Лк: 8 ч., пр.з: 8 ч. Темы лекций и практических занятий:

Принципы построения численных методов поиска безусловного экстремума.

Методы одномерной минимизации: общая постановка задачи и стратегии поиска.

Метод равномерного поиска.

Метод деления интервала пополам.

Метод дихотомии.

Метод золотого сечения.

Метод Фибоначчи.

Методы случайного поиска: адаптивный метод случайного поиска

Метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге

Методы первого порядка: метод градиентного спуска с постоянным шагом

Метод наискорейшего градиентного спуска

Метод покоординатного спуска

Метод Гаусса–Зейделя

Метод Флетчера–Ривса

Методы второго порядка: Метод Ньютона

## Метод Ньютона–Рафсона

### Модуль 3 Численные методы поиска условного экстремума

Лк: 8 ч., пр.з: 8 ч. Темы лекций и практических занятий:

Принципы построения численных методов поиска условного экстремума

Методы последовательной безусловной минимизации: метод штрафов

Метод барьерных функций

Комбинированный метод штрафных функций

Метод множителей

Метод точных штрафных функций

Методы возможных направлений: метод проекции градиента

Метод проекции градиента в задачах с ограничениями типа равенств

Метод проекции градиента в задачах с ограничениями типа неравенств

### Задания для организации рубежного контроля

Контрольная работа №1 используется для рубежного контроля в модуле 1, контрольная работы №2 и №3 - для рубежного контроля в модулях 2 и 3.

#### Контрольная работа №1. Темы: условия существования экстремума функций

1. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе целевой функции  $f(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ . Исследовать целевую функцию на выпуклость.
2. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе целевой функции  $f(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$ . Исследовать целевую функцию на выпуклость.
3. Найти экстремум функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^4$  на множестве  $R^2$ .
4. Найти экстремум функции  $f(x) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1^2)^2$  на множестве  $R^2$ .
5. Найти экстремум функции  $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1x_2 + 2x_3$  на множестве  $R^3$ .
6. Исследовать на экстремум функцию  $f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 + x_2x_3 + 6x_2 + 2$  на множестве  $R^3$ .
7. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = n^2x_1^2 - x_1x_2 + \frac{(n+1)^2}{2}x_2^2 - nx_1$ .
8. Найти условный экстремум в задаче  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}$ ,  
 $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$ .
9. Найти условный минимум в задаче  $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min$ ,  
 $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ ,  $g_2(x) = -x_1 \leq 0$ ,  $g_3(x) = -x_2 \leq 0$ .
10. Найти условный минимум в задаче  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow \min$ ,  
 $g_1(x) = -x_1 - x_2 - x_3 + 1 \leq 0$ ,  $g_2(x) = -x_1 - 3x_2 + 3 \leq 0$ .

Критерии оценки (в баллах): за каждое правильно выполненное задание студент получает 1 балл. Максимально возможное количество баллов за работу: 10 баллов.

#### Контрольная работа №2. Темы: численные методы поиска безусловного экстремума

1. Определить методом дихотомии минимум функции  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ , заданной на отрезке  $\Delta = [1; 3]$ , при  $N = 8$ ,  $\varepsilon = 0,1$ .
2. Определить методом Фибоначчи минимум функции  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ , заданной на отрезке  $\Delta = [1; 3]$ , при  $N = 4$ .
3. Определить методом золотого сечения минимум функции  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ , заданной на отрезке  $\Delta = [1; 3]$ , при  $N = 4$ .



4. Методом Фибоначчи найти минимальное значение и минимум функции  $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$  на отрезке  $[7; 7,5]$ . Точку минимума найти с точностью  $\varepsilon = 0,05$ .
5. Методом Фибоначчи найти минимальное значение и минимум функции  $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$  на отрезке  $[1,5; 2]$ . Точку минимума найти с точностью  $\varepsilon = 0,07$ .
6. Методом деления отрезка пополам найти минимальное значение и точку минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\varepsilon$ :
  - а)  $f(x) = x^2 - 3x + x \ln(x)$ ,  $[a, b] = [1, 2]$ ,  $\varepsilon = 0,05$ .
  - б)  $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin(x)$ ,  $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $\varepsilon = 0,03$ .
7. Методом золотого сечения найти минимальное значение и точку минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\varepsilon$ :
  - а)  $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ ,  $[a, b] = [-1, 0]$ ,  $\varepsilon = 0,003$ .
8. Методом Фибоначчи найти минимальное значение и точку минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\varepsilon$ :
 
$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}, \quad [a, b] = [0, 1], \quad \varepsilon = 0,1.$$
9. Методом Фибоначчи найти минимальное значение и точку минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\varepsilon$ :
 
$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, \quad [a, b] = [-1, 0], \quad \varepsilon = 0,1.$$
10. Методом золотого сечения найти минимальное значение и точку минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\varepsilon$ :
 
$$f(x) = x^2 - 2x + e^x, \quad [a, b] = [1; 1,5], \quad \varepsilon = 0,001.$$

Критерии оценки (в баллах): за каждое правильно выполненное задание студент получает 1 балл. Максимально возможное количество баллов за работу: 10 баллов.

### Контрольная работа №3. Темы: численные методы поиска условного экстремума

1. Решить следующую условную задачу минимизации методом штрафной квадратичной функции: минимизировать  $f(x) = x^2$  при ограничении  $h(x) = x - 1 = 0$ .
2. Используя квадратичный штраф, решить следующую условную задачу минимизации функции: минимизировать  $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$  при ограничении  $h(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0$ .
3. Используя логарифмическую штрафную функцию, решить следующую условную задачу минимизации функции: минимизировать  $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$  при ограничении  $h(x) = 5 - x_1 - x_2 \geq 0$ .
4. Методом штрафных функций решить задачу условной оптимизации
 
$$f = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \rightarrow \min,$$

$$4x_1^2 + 9x_2^2 = 36.$$
5. Методом барьерных функций решить задачу условной оптимизации
 
$$f(x) = x \rightarrow \min;$$

$$\varphi(x) = 3 - x \leq 0.$$
6. Методом барьерных функций решить задачу условной оптимизации
 
$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \rightarrow \min;$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2 \leq 0.$$
7. Методом штрафных функций решить задачу условной оптимизации
 
$$f(x, y) = 4(y - x)^2 + 3(x - 1)^2 \rightarrow \min$$

$$y = x + 1$$
8. Методом проекции градиента решить задачу условной оптимизации

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min;$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

9. Методом проекции градиента решить задачу условной оптимизации

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min;$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \quad g_2(x) = -x_1 \leq 0, \quad g_3(x) = -x_2 \leq 0.$$

10. Методом проекции градиента решить задачу условной оптимизации

$$f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^3 \rightarrow \min;$$

$$g_1(x) = x_1 \geq 0, \quad g_2(x) = x_2 \geq 0, \quad g_3(x) = x_1 + x_2 \geq 4.$$

Критерии оценки (в баллах): за каждое правильно выполненное задание студент получает 1 балл. Максимально возможное количество баллов за работу: 10 баллов.

### Задания для организации текущего контроля

Текущий контроль модуля 1 включает в себя три самостоятельные работы №1 - №3. Текущий контроль модуля 2 включает в себя две самостоятельные работы №4, №5. Текущий контроль модуля 3 включает в себя две самостоятельные работы №6, №7.

#### Примерный вариант заданий самостоятельной работы № 1. Тема: общая постановка задачи оптимизации и основные положения

1. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе целевой функции  $f(x) = x_1^3 - 3x_1x_2 + x_2^3$  в точке  $(0,0)^T$ .
2. Проверить, удовлетворяют ли условию Липшица следующие функции: а)  $f(x) = 2x$  на отрезке  $[0, 1]$ ; б)  $f(x) = \sin(x)$  на отрезке  $[0, \pi]$ .
3. Исследовать на выпуклость функцию  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$  на множестве  $R^2$ .

Критерии оценки (в баллах):

| Количество верно решенных задач | Количество баллов |
|---------------------------------|-------------------|
| 1                               | 1                 |
| 2                               | 2                 |
| 3                               | 3                 |

#### Примерный вариант заданий самостоятельной работы № 2. Тема: необходимые и достаточные условия существования безусловного экстремума

1. Исследовать на выпуклость функции: а)  $y = \frac{2}{x}$ ,  $x > 0$ ; б)  $z = e^{2x_1 - x_2}$ .
2. Найти экстремум функции  $f(x) = x_1^2 - x_2^2$  на множестве  $R^2$ .
3. Найти экстремум функции  $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  на множестве  $R^2$ .

Критерии оценки (в баллах):

| Количество верно решенных задач | Количество баллов |
|---------------------------------|-------------------|
| 1                               | 1                 |
| 2                               | 2                 |
| 3                               | 3                 |

**Примерный вариант заданий самостоятельной работы № 3. Тема: необходимые и достаточные условия существования условного экстремума**

1. Найти условный экстремум в задаче  $f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow extr$ ,  
 $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ .
2. Найти условный экстремум в задаче  $f(x) = x_1 \rightarrow max$ ,  
 $g_1(x) = -x_2 \leq 0, \quad g_2(x) = x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0$ .
3. Найти условный экстремум в задаче  $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow extr$ ,  
 $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 52 \leq 0$ .

**Критерии оценки (в баллах):**

| Количество верно решенных задач | Количество баллов |
|---------------------------------|-------------------|
| 1                               | 1                 |
| 2                               | 2                 |
| 3                               | 3                 |

**Примерный вариант заданий самостоятельных работ № 4, №5. Тема: численные методы поиска безусловного экстремума**

1. Найти минимум функции  $f(x) = 2x^2 - 12x$ 
  - а) методом равномерного поиска;
  - б) методом деления интервала пополам;
  - в) методом дихотомии;
  - г) методом золотого сечения;
  - д) методом Фибоначчи.
2. Найти минимум функции  $f(x) = -2x^3 + 20x^2 - 2x + 10$ 
  - а) методом равномерного поиска;
  - б) методом деления интервала пополам;
  - в) методом дихотомии;
  - г) методом золотого сечения;
  - д) методом Фибоначчи.
3. Найти минимум функции  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$ 
  - а) методом равномерного поиска;
  - б) методом деления интервала пополам;
  - в) методом дихотомии;
  - г) методом золотого сечения;
  - д) методом Фибоначчи.

**Примерный вариант заданий самостоятельных работ № 6, №7. Тема: численные методы поиска условного экстремума**

1. Методом штрафных функций решить задачу условной оптимизации  
 $f(x) = (x_1 - 2)^4 + 20(x_1 - 2x_2)^2 \rightarrow min$ ,  
 $x_2 \geq 2x_1 + 2$ .
2. Методом барьерных функций решить задачу условной оптимизации  
 $f(x, y) = (x - y)^2 + 10(x + 5)^2 \rightarrow min$   
 $x + y \geq 0$
3. Методом штрафных функций решить задачу условной оптимизации

$$f(x, y) = 5(x - y)^2 + (x - 2)^2 \rightarrow \min$$

$$x + y \leq 1$$

4. Методом штрафных функций решить задачу условной оптимизации

$$f(x, y) = 10(y - x)^2 + y^2 \rightarrow \min$$

$$x + y \geq 1$$

5. Методом барьерных функций решить задачу условной оптимизации

$$f(x, y) = 2(x - y)^2 + 14(y - 3)^2 \rightarrow \min$$

$$y - x \geq 1$$

6. Методом барьерных функций решить задачу условной оптимизации

$$f(x, y) = 2(x - y)^2 + 14(y - 3)^2 \rightarrow \min$$

$$x = -y$$

### Перечень вопросов к экзамену.

1. Формулировка стандартной математической задачи оптимизации. Классификация методов оптимизации.
2. Общая постановка задачи оптимизации и основные положения.
3. Градиент, матрица Гессе, квадратичная форма, выпуклые функции и их основные свойства. Условие Липшица.
4. Необходимые условия существования безусловного локального экстремума.
5. Достаточные условия существования безусловного локального экстремума. Критерий проверки достаточных условий.
6. Общая постановка задачи поиска условного экстремума. Обобщенная и классическая функции Лагранжа.
7. Условный экстремум при ограничениях типа равенств. Постановка и стратегия решения задачи. Необходимые и достаточные условия экстремума первого порядка.
8. Условный экстремум при ограничениях типа равенств. Постановка и стратегия решения задачи. Необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.
9. Условный экстремум при ограничениях типа неравенств. Постановка и стратегия решения задачи. Необходимые и достаточные условия экстремума первого порядка.
10. Условный экстремум при ограничениях типа неравенств. Постановка и стратегия решения задачи. Необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.
11. Численные методы поиска безусловного экстремума. Основные понятия, методы нулевого, первого и второго порядков.
12. Методы нулевого порядка: методы одномерной оптимизации.
13. Методы нулевого порядка: метод равномерного поиска.
14. Методы нулевого порядка: метод деления интервала пополам.
15. Методы нулевого порядка: метод дихотомии.
16. Методы нулевого порядка: метод золотого сечения.
17. Методы нулевого порядка: метод Фибоначчи.
18. Методы случайного поиска: адаптивный метод случайного поиска.
19. Метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге.
20. Методы первого порядка: метод градиентного спуска с постоянным шагом.
21. Метод наискорейшего градиентного спуска.
22. Метод покоординатного спуска.
23. Метод Ньютона.
24. Метод Ньютона-Рафсона.
25. Принципы построения численных методов поиска условного экстремума.

26. Метод штрафов.
27. Метод барьерных функций.
28. Метод проекции градиента в задачах с ограничениями типа равенств.
29. Метод проекции градиента в задачах с ограничениями типа неравенств.

### Перечень задач к экзамену

1. Найти точки экстремума функции  $f(x) = -(x_1 + 1)^2 - \frac{(x_2 + 4)^2}{16}$  на множестве  $R^2$ .
2. Найти точки экстремума функции  $f(x) = x_1^2 - 4x_1x_2$  на множестве  $R^2$ .
3. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе целевой функции  $f(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$ . Исследовать целевую функцию на выпуклость.
4. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе целевой функции  $f(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ . Исследовать целевую функцию на выпуклость.
5. Найти экстремумы функции  $f(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_3^2$  на множестве  $R^3$ .
6. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1$ .
7. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$ .
8. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$ .
9. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = (x_1 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ .
10. Найти условный экстремум в задаче  $\begin{cases} f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}; \\ g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0. \end{cases}$
11. Найти условный экстремум в задаче  $\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min; \\ g_1 = x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0. \end{cases}$
12. Найти условный экстремум в задаче  $\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min; \\ g_1 = x_2^2 - x_1 = 0. \end{cases}$

### Темы докладов, рефератов, сообщений

Доклады, рефераты и сообщения могут использоваться для набора поощрительных баллов.

Метод квадратичной интерполяции  
 Метод конфигураций  
 Метод деформируемого многогранника  
 Метод Розенброка  
 Метод сопряженных направлений  
 Методы случайного поиска: метод наилучшей пробы  
 Метод Дэвидона–Флетчера–Пауэлла  
 Метод кубической интерполяции  
 Метод Марквардта  
 Метод множителей  
 Метод точных штрафных функций  
 Метод Зойтендейка

### 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **Основная литература:**

1. Прокопенко, Н. Ю. Методы оптимизации: учебное пособие / Н. Ю. Прокопенко. — Нижний Новгород: ННГАСУ, 2018. — 118 с. — ISBN 978-5-528-00287-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/164796> (дата обращения: 27.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации: учебное пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 344 с. — ISBN 978-5-8114-1217-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168975> (дата обращения: 27.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Певнева, А. Г. Методы оптимизации: учебное пособие / А. Г. Певнева, М. Е. Калинкина. — Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2020. — 64 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/191071> (дата обращения: 27.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Струченков, В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах: учебное пособие / В. И. Струченков. — Москва: СОЛОН-Пресс, 2009. — 320 с. — ISBN 978-5-91359-061-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/13781> (дата обращения: 27.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

### **Дополнительная литература:**

5. Бабёнышев, С. В. Методы оптимизации: учебное пособие / С. В. Бабёнышев, Е. Н. Матеров. — Железногорск: СПСА, 2019. — 134 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/170704> (дата обращения: 27.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации. Практический курс : учебное пособие / А. В. Пантелеев. — Москва: Логос, 2020. — 424 с. — ISBN 978-5-98704-540-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/163062> (дата обращения: 27.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
7. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-1887-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168850> (дата обращения: 27.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

## **5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

1. Официальный сайт математического портала [allmath.ru](http://www.allmath.ru). Режим доступа: <http://www.allmath.ru/probablytheory.htm>
2. Образовательный математический сайт Exponenta. Режим доступа: <http://www.exponenta.ru/>
3. Официальный сайт московского центра непрерывного математического образования. Режим доступа: [http://www.mathnet.ru/ej.phtml?option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/ej.phtml?option_lang=rus)
4. Официальный сайт журнала «Экономика и математические методы». Режим доступа: <http://www.cemi.rssi.ru/emm/home.htm>

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

| <b>Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий</b> | <b>Вид занятий</b>           | <b>Наименование оборудования, программного обеспечения</b>                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>                                                                 | <b>2</b>                     | <b>3</b>                                                                                                                                           |
| Аудитория 210                                                            | Лекции, практические занятия | Демонстрационное оборудование: доска, проектор – 1 шт., переносной экран – 1 шт.<br>Специализированная мебель: столы, стулья (28 посадочных мест). |

ФГБОУ ВО «УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»  
СИБАЙСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) УУН<sub>ИТ</sub>  
ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ  
на 7 (9) семестр

очная (очно-заочная)

| Вид работы                                                                                                                                    | Объем дисциплины |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)                                                                                                   | 4/144 (4/144)    |
| Учебных часов на контактную работу с преподавателем:                                                                                          |                  |
| лекций                                                                                                                                        | 24 (18)          |
| практических/ семинарских                                                                                                                     | 24 (18)          |
| лабораторных                                                                                                                                  |                  |
| других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР) | 1,2 (0)          |
| Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)                                                                                      | 67,8 (72)        |
| Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/ дифференцированному зачету (контроль)                                                          | 27 (36)          |

Форма контроля:  
экзамен 7 (9) семестр



| №<br>п/п | Тема и содержание                                                                                                            | Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах) |       |        |    |           | Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка) | Задания по самостоятельной работе студентов | Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.) |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------|----|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                                              | Всего                                                                                                                                              | ЛК    | ПР/СЕМ | ЛР | СРС       |                                                                                  |                                             |                                                                                                   |
| 1        | 2                                                                                                                            | 3                                                                                                                                                  | 4     | 5      | 6  | 7         | 8                                                                                | 9                                           | 10                                                                                                |
| 1.       | Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции: общая постановка задачи оптимизации и основные положения | 13 (13)                                                                                                                                            | 2 (1) | 3 (1)  |    | 8 (8)     | 1 - 7                                                                            |                                             | Самостоятельные работы, контрольные работы, экзамен                                               |
| 2.       | Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума                                                                    | 14 (14)                                                                                                                                            | 2 (2) | 2 (2)  |    | 10 (10)   | 1 - 7                                                                            |                                             | Самостоятельные работы, контрольные работы, экзамен                                               |
| 3.       | Необходимые и достаточные условия условного экстремума                                                                       | 17 (17)                                                                                                                                            | 4 (3) | 3 (3)  |    | 10 (10)   | 1 - 7                                                                            |                                             | Самостоятельные работы, контрольные работы, экзамен                                               |
| 4.       | Принципы построения численных методов поиска безусловного экстремума. Методы нулевого порядка                                | 17 (17)                                                                                                                                            | 4 (3) | 3 (3)  |    | 10 (10)   | 1 - 7                                                                            |                                             | Самостоятельные работы, контрольные работы, экзамен                                               |
| 5.       | Численные методы поиска безусловного экстремума: методы первого и второго по-                                                | 17,8 (19)                                                                                                                                          | 4 (3) | 3 (3)  |    | 10,8 (12) | 1 - 7                                                                            |                                             | Самостоятельные работы, контрольные работы, экзамен                                               |

|   |                                                                                                           |             |         |         |  |           |       |  |                                                     |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------|---------|--|-----------|-------|--|-----------------------------------------------------|
|   | рядков                                                                                                    |             |         |         |  |           |       |  |                                                     |
| 6 | Принципы построения численных методов поиска условного экстремума. Метод штрафов. Метод барьерных функций | 28 (28)     | 4 (3)   | 5 (3)   |  | 10 (10)   | 1 - 7 |  | Самостоятельные работы, контрольные работы, экзамен |
| 7 | Численные методы поиска условного экстремума: метод проекции градиента                                    |             | 4 (3)   | 5 (3)   |  | 9 (12)    | 1 - 7 |  | Самостоятельные работы, контрольные работы, экзамен |
|   | <b>Всего часов:</b>                                                                                       | 106,8 (108) | 24 (18) | 24 (18) |  | 67,8 (72) |       |  |                                                     |

